Dat vind ik nou mooi

Kuipers, Theo A.F.

Published in:
EPRINTS-BOOK-TITLE

Publication date:
1991

Theo A.F. Kuipers

DAT VIND IK NOU MOOI

> "...I tried to explain (...) that (...) Mendeleevs Periodic Table, which just during those weeks we were laboriously learning to unravel, was poetry, loftier and more solemn than all the poetry we had swallowed down in leceo; and come to think of it, it even rhymed!" (Primo Levi, *The Periodic Table*, p.41)

Het ligt voor de hand te vermoeden dat J.J.A. Mooij één of meer overeenkomsten ervaart tussen de drie wetenschapsgebieden waar hij zich mee bezig heeft gehouden: wiskunde, filosofie en letterkunde. Het zou me niet verbazen als esthetische ervaring zo'n gemeenschappelijke noemer voor hem is. Maar hoewel hij regelmatig zijn esthetische beleving in gedichten verwoordt, heb ik nog geen poëzie van zijn hand gelezen over mooie wiskunde of filosofie.

Gedichten over voorbeelden van schoonheid in wiskunde en filosofie zijn in het algemeen ook zeldzaam. Dat verbaast mij. Hebben zo weinig bèta's, afgezien van biologen en medici, aanleg voor het maken van poëzie? Op mijzelf afgaande weet ik vrij zeker dat ik mij, bij een minimale aanleg voor de dichtkunst, zou toeleggen op heel mooie oplossingen en oplossingsmethoden van op het eerste gezicht moeilijke logisch-wiskundige problemen. Niet alleen typisch wiskundige hoogstandjes, zoals het diagonaal bewijs voor de overaftelbaarheid van de reële getallen, maar ook min of meer alledaagse voorbeelden kunnen mij een aangenaam gevoel van schoonheid bezorgen. Een vrij bekend voorbeeld is het probleem hoe ouders hun land op een volstrekt eerlijke manier onder hun twee kinderen kunnen verdelen. Kan het eerlijker en gaver dan de één het land in tweeën te laten delen en de ander te laten kiezen?

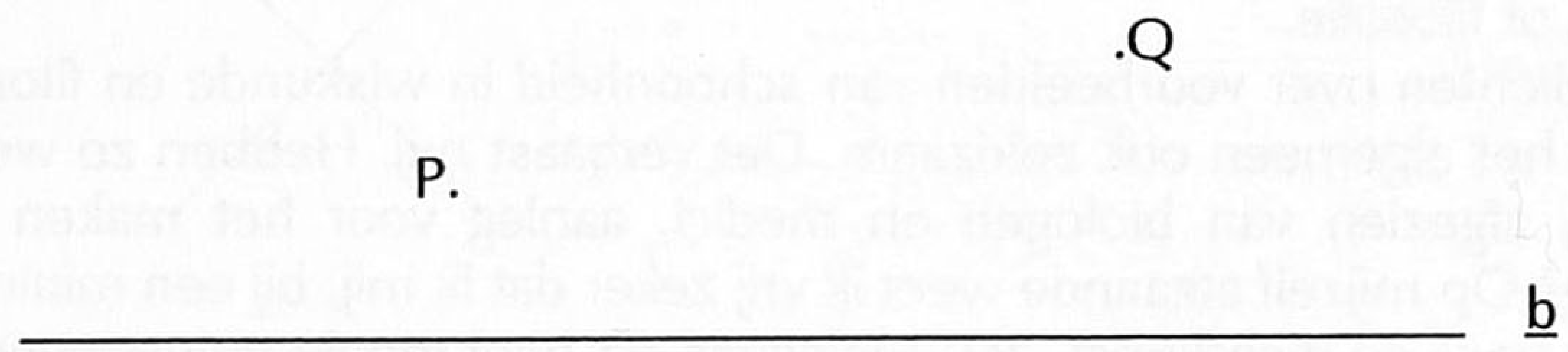
Tien voorbeelden

In het eerste deel van deze bijdrage formuleer ik tien alledaagse wiskundige problemen die gemeenschappelijk hebben dat de oplossing niet alleen verkregen kan worden door vlijtig rekenwerk, maar ook door flitsend denkwerk, dat dan leidt tot een mooie oplossing of een mooie oplossingsmethode.

De lezer wordt in het volgende uitgenodigd zelf aan de slag te gaan. Uw intellectuele en esthetische vermogens komen het beste tot hun recht, als U de problemen in het eerste deel eerst probeert op te lossen met alleen de vuistregel "Niet rekenen, maar denken", liefst in familie-of ander groepsverband. Voor zover dat niet lukt, kunt U het in een tweede ronde nog eens proberen na kennisneming van de overige vuistregels in het tweede deel voor het zoeken van mooie oplossingen. Als het dan nog niet lukt, en dat zal bij een aantal problemen het geval zijn, kunt U kennisnemen van de oplossingen in het derde deel.

Wees ervan verzekerd dat de oplossingen nooit 'flauw' zijn. Het kan heel goed voorkomen dat U een tijd ten onrechte de indruk heeft dat U de goede oplossing te pakken heeft. Als U echter de goede oplossing werkelijk heeft dan bent U daar zelf niet alleen zeker van, maar kunt U anderen ook gemakkelijk overtuigen. Een korte zin die het waarom van het antwoord aangeeft is daarbij vaak al voldoende.

1) *De kortste weg.* Een boer gaat iedere dag vanuit zijn boerderij P zijn kippen in het kippenhok Q water geven, waarbij hij het water uit de beek *b* haalt. Uiteraard neemt hij altijd de kortste weg, zodat in de loop der jaren een mooi pad van P via *b* naar Q is ontstaan. Waar loopt dat pad?

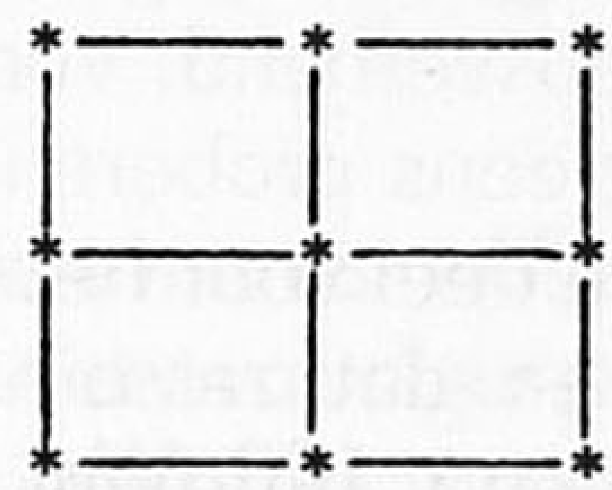


2) *De retourtrip.* A en B gaan ieder in hun eigen auto vanuit Groningen op en neer naar Amsterdam. Ze vertrekken gelijktijdig, volgen heen en terug dezelfde route en verblijven in Amsterdam precies vier uur. A rijdt zowel op de heenweg als op de terugweg gemiddeld 80 km/uur. B rijdt op de heenweg gemiddeld 100 km/uur en op de terugweg 60 km/uur. Wie is het eerst terug?

3) *Wijnmenging.* Twee identieke flessen bevatten elk vijf glazen wijn, de een rode, de ander witte. Er kunnen zes glazen in elke fles. Uit de fles met rode wijn wordt één glas overgeschonken in de fles met witte wijn. Deze wordt daarna eerst goed geschud, waarna een glas van dit mengsel

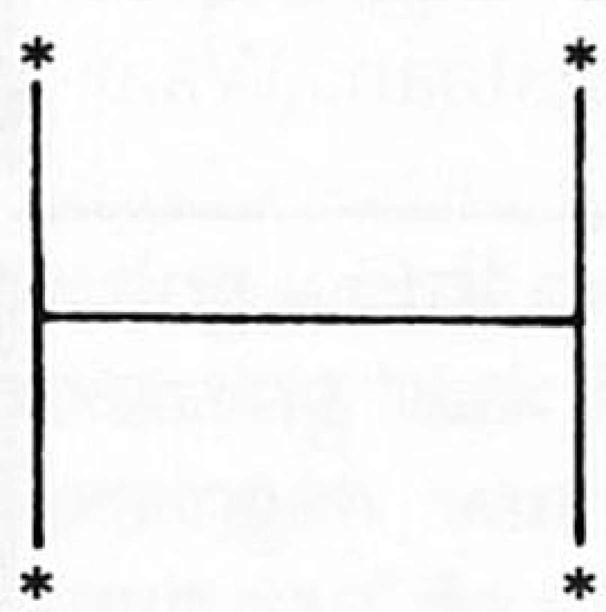
wordt teruggeschonken in de fles met rode wijn. In welke fles is de concentratie van de toegevoegde wijnsoort het grootst?

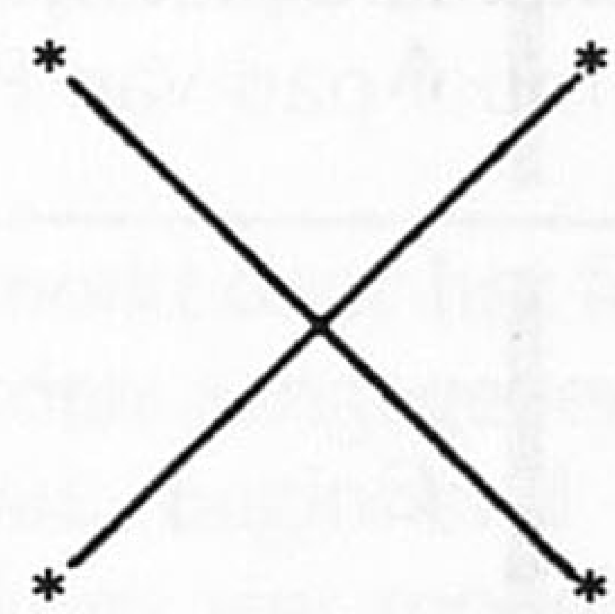
4) *Drie keer afslaan.* Verbind alle negen 'boter-kaas-en-eieren-posities' door een aaneengesloten rechte lijn te trekken, waarbij U slechts drie keer van richting mag veranderen.



5) *Sluizen.* Waar is meer water voor nodig bij opwaarts sluizen: voor een grote boot of voor een kleine? De boten worden afzonderlijk gesluisd, in dezelfde sluis, met constante waterstanden voor en achter de sluis en er zijn geen andere boten in het geding.

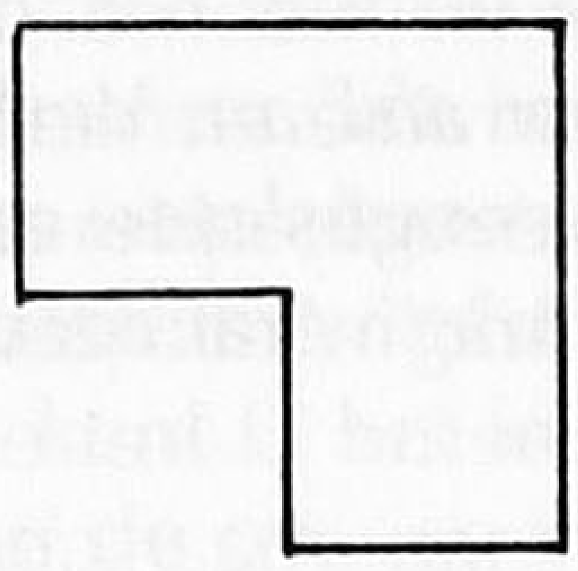
6) *Het kortste wegennet.* Wat is het kortste wegennet dat alle vier plaatsen op de hoekpunten van een vierkant met elkaar verbindt? Het kan korter dan de twee aangegeven mogelijkheden.





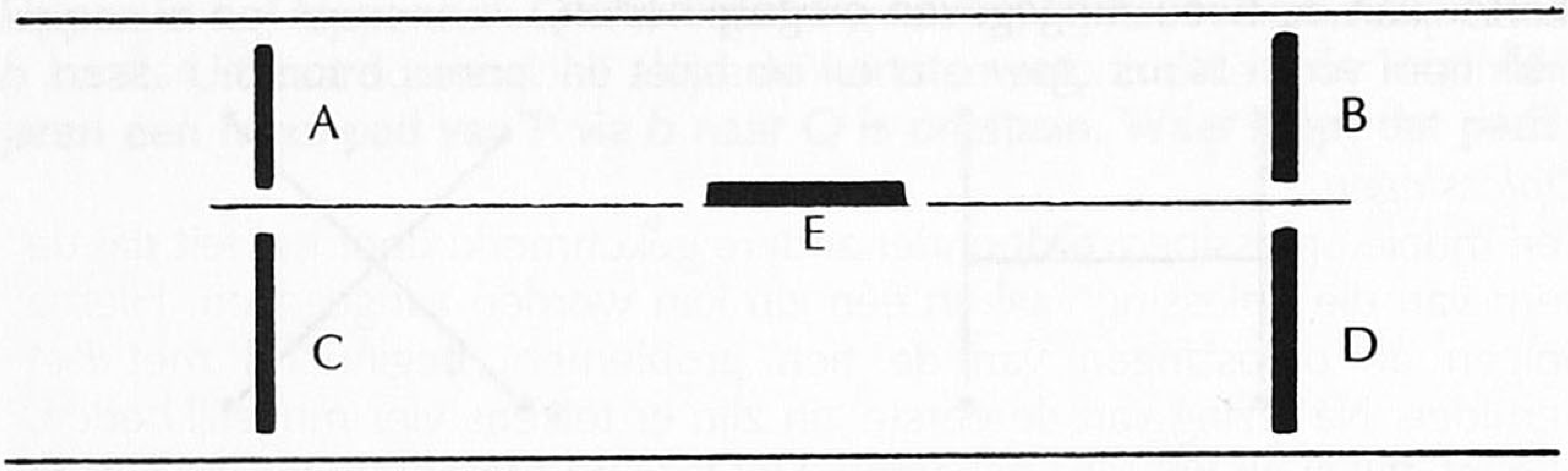
7) *Zelfde tijd, zelfde plaats.* Een monnik ging ter bedevaart naar een kapelletje op een hoge berg. Er was slechts één kronkelig pad. Hij vertrok op een zaterdagochtend om acht uur van de voet van de berg en kwam juist voor middernacht aan bij het kapelletje. Op maandagochtend om acht uur begon hij weer aan de afdaling. Nog voor 's middags twaalf uur was hij al beneden. Bewijs dat er één tijdstip op die zaterdag en maandag is geweest dat hij zich op precies dezelfde plek op het kronkelpad bevond.

8) *Identieke vierendeling.* Verdeel onderstaande figuur in vier stukken van gelijke vorm en oppervlakte.



9) *1 + ... + 100*. Wat is de som van de getallen 1 tot en met 100?

10) *Draaibruggen.* In de figuur stellen A tot en met E draaibruggen voor in een rivier. De brugwachter draait de bruggen lukraak open en dicht, zodanig dat de kans dat een brug open staat 50% bedraagt en dat de kans dat de ene brug open is onafhankelijk is van de kans dat een andere dat is. Wat is de kans dat een schip erdoor kan? Hierbij zijn niet alleen de routes A-B en C-D maar ook de routes A-E-D en C-E-B mogelijk, mits de betreffende bruggen openstaan.



Heuristische principes
Piet Grijs heeft wetenschapsbeoefening eens treffend getypeerd als het uitzoeken van ingewikkelde dingen. Als het goed is richt wetenschap zich inderdaad op complexe zaken, maar bijna iedereen zal daarbij ook onderschrijven dat de oplossing en de oplossingsmethode voor een probleem niet ingewikkelder moeten zijn dan nodig is. Het gezegde "Waarom eenvoudig als het ook moeilijk kan?" is doorgaans diskwalificerend bedoeld. Toch zijn we niet erg ingesteld op het zoeken van de eenvoudigste, laat staan de mooiste, oplossing van een probleem. Zeker als we bij een probleem betrekkelijk snel kunnen zien dat een standaard oplossingsmethode vermoedelijk bruikbaar is. Dan zijn we helemaal niet geneigd ons best te doen voor het vinden van een eenvoudige, mooie oplossing.

Natuurlijk bestaat er ook geen algemene strategie die gegarandeerd leidt tot zo'n fraaie oplossing, aangenomen dat die bestaat. Toch is het heel goed mogelijk een aantal vuistregels, deftiger gezegd, heuristische principes te formuleren die het vinden van een mooie oplossing kunnen stimuleren. De volgende zes, elkaar enigszins overlappende, principes komen daarvoor in elk geval in aanmerking, waarbij ik begin met de instructie genoemd in het eerste deel.

1) *Niet rekenen, maar denken.*
2) *Probeer hetzelfde probleem op een heel andere manier te formuleren.*
3) *Probeer het probleem te transformeren in een eenvoudiger probleem.*
4) *Probeer buiten het opgedrongen kader van de probleemstelling te treden.*
5) *Probeer een gedachtenexperiment te bedenken.*
6) *Probeer al het voorgaande met behulp van symmetrie-beschouwingen.*

Naast (1) is er steeds tenminste één ander principe dat nuttige diensten kan bewijzen bij het oplossen van de tien problemen. Wie er niet in geslaagd is voor alle problemen mooie oplossingen te vinden, en dat zal voor vrijwel iedereen gelden, raad ik aan die problemen nog eens opnieuw te bekijken in het licht van de principes (2)-(6). Concreet: ga bij zo'n probleem voor elk principe na of U kans ziet dat principe toe te passen.

Oplossingen

Een mooie oplossing wordt onder andere gekenmerkt door het feit dat de kern van die oplossing vaak in één zin kan worden aangegeven. Hierna volgen de oplossingen van de tien problemen, beginnend met het kernidee. Na lezing van de eerste zin zijn er telkens vier mogelijkheden. U bent zelf al op het idee gekomen. Het is U nu meteen duidelijk. De zin zet U opnieuw tot nadenken. U geeft het op en leest de summiere uitwerking die volgt op de eerste zin.

1) Beschouw het spiegelbeeld Q* van Q ten opzichte van de beek. Verbind P met Q*. Noem het snijpunt met de beek S. Nu is eenvoudig na te gaan dat het pad loopt van P via S naar Q.

2) A is het eerst terug, want B rijdt veel langer 60 km/uur dan 100 km/uur. Als U dacht dat ze op dezelfde tijd terug zouden zijn, heeft U het probleem verward met een ander probleem. Welk?

3) De concentraties moeten gelijk zijn, zoals eenvoudig is in te zien door even aan te nemen dat de wijn van de toegevoegde soort als een schijf drijft bovenop die van de andere soort. Als de twee schijven niet even dik zouden zijn, zou de totale hoeveelheid van de ene soort zijn toegenomen en die van de andere afgenomen.

4) Betrek de punten met coördinaten (3,0) en (0,3) bij het probleem (uitgaande van de coördinaten (0,0) voor het hoekpunt links beneden, (2,0) voor rechts beneden, (2,2) voor rechtsboven, etc.). Begin bij (2,2) en ga naar (0,0), dan (eerste afslag) naar (3,0), dan (tweede afslag) via (2,1) en (1,2) naar (0,3), en tot slot (derde afslag) terug naar (0,0).

5) Er is een gelijke hoeveelheid water nodig, want elke boot zit bij de lage waterstand evenveel onder water als bij de hoge waterstand. De benodigde hoeveelheid water is in beide gevallen dus precies gelijk aan de 'inhoud' van de sluis.

6) Het kortste wegennet heeft twee driesprongen met drie gelijke hoeken (dus van 120 graden), te vinden door bij wijze van gedachtenexperiment te trekken aan een volgens de 'H-oplossing' op geschikte wijze (met twee lussen) gespannen touw. Bij het kortste netwerk moet er krachtenevenwicht zijn ontstaan en dat is alleen het geval als de twee driesprongen uit drie gelijke hoeken bestaan. Merk terzijde op dat dergelijke driesprongen in de natuur vaak voorkomen, bijvoorbeeld in honingraten.

7) Stel dat er een tweede monnik is. Deze begint niet op maandag maar op zaterdag om acht uur aan de afdaling. Die komt de eerste ergens tegen. Analoog komt de op zaterdag klimmende en op maandag afdalende monnik zichzelf tegen, zij het precies twee dagen later.

8) Verdeel de figuur op voor de hand liggende wijze in drie maal vier gelijke vierkantjes. De gevraagde vier identieke stukken bestaan elk uit drie vierkantjes, tezamen van precies dezelfde vorm als de beginfiguur.

9) De gevraagde som is de helft van de som van 1 tot en met 100 en de som van 100 tot en met 1. Zeker als beide sommen onder elkaar geschreven worden, wordt onmiddellijk duidelijk dat de dubbele som gelijk is aan 100 maal 101, en dus aan 10100. Dus het antwoord is 5050.

10) De kans is 1/2, hetgeen is in te zien door het probleem of een voetganger kan oversteken erbij te betrekken. De kans p dat een voetganger kan oversteken, is enerzijds 1 minus de kans q dat de boot erdoor kan, want de voetganger kan oversteken dan en slechts dan als de boot er niet door kan. Anderzijds zijn p en q even groot, omdat de probleemsituaties van boot en voetganger identiek zijn. Uit $p=1-q$ en $p=q$ volgt meteen $p=q=1/2$.

De eerlijkheid gebiedt mij te bekennen dat ik (ook) maar twee of drie oplossingen zelf heb gevonden. Dit is een extra reden waarom ik zou moeten besluiten met te vermelden waar ik de problemen en oplossingen vandaan heb. Omdat ik de meeste voorbeelden in weinig studieuze omstandigheden op het spoor ben gekomen, weet ik dat helaas maar van enkele gevallen. Het kortste wegennet (nr. 6) werd ooit door Jaap

Klouwen gepresenteerd in zijn fraaie rubriek 'Denkwaar' in *Folia Civitatis*. De monnik (nr. 7) heb ik uit Arthur Koestlers *The act of creation* (1964). De oplossing van het somprobleem (nr. 9) wordt vaak aan de beroemde wiskundige Gauss toegeschreven, toen hij nog een schooljongetje was. Het bruggenprobleem (nr. 10), het voorbeeld dat ik zelf het mooiste vind, trof ik aan bij Bas van Fraassen in zijn boek *Laws and symmetries* (1989), waarin hij ook het probleem van de kortste weg (nr. 1) presenteert, maar dat kende ik al veel eerder. Nu Van Fraassen zulke problemen behandelt mag ik aannemen dat het ook voor mijn collega's Nederlandse filosofen een respectabel onderwerp is geworden. Het stelt mij eindelijk in staat anderen publiekelijk uit te nodigen mijn collectie aan te vullen en J.J.A. Mooij uit te dagen tot het maken van een gedicht over een ongebruikelijk onderwerp.